

## Unidade 2 - PROBABILIDADE

### → Conceitos básicos

- \* Probabilidade: É um número associado a um evento, destinado a medir sua possibilidade de ocorrência.
- \* Experimento: qualquer processo que permita fazer observações.
- \* Evento: uma coleção de resultados de um experimento.
- \* Evento simples: é um resultado, ou um evento, que não pode ser subdividido.
- \* Espaço amostral de um experimento ( $S$ ): consiste em todos os eventos simples possíveis de ocorrer num experimento sujeitos às leis do acaso, ou seja, o espaço amostral consiste no conjunto de todos os resultados que não podem ser mais subdivididos.

Seja  $P$  o símbolo usado para a probabilidade, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  eventos específicos.  $P(A)$  denota a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ , que pode ser determinada sob duas formas:

#### 1. Probabilidade dada através da frequência relativa.

Realizando (ou observando) o experimento um grande número de vezes,

$$P(A) = \frac{\text{número de ocorrências de } A}{\text{número de repetições do experimento}}$$

#### 2. Probabilidade dada através da definição clássica.

Assumindo que o experimento tenha  $n$  eventos simples com a mesma chance de ocorrer,

$$P(A) = \frac{\text{número de maneiras como } A \text{ pode ocorrer}}{\text{número de eventos simples diferentes}}$$

Área total = 1

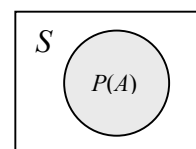


Diagrama de Venn.

Ex. 1. Determine a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser atingida por um raio este ano.

O espaço amostral consiste nestes dois eventos simples: a pessoa escolhida é atingida por um raio, ou não é. Como estes dois eventos não são igualmente prováveis, devemos usar a aproximação pela frequência relativa. Em um ano recente, 371 pessoas foram atingidas por um raio nos EUA, que possui uma população de aproximadamente de 260 milhões de pessoas.

$$P(A) = \frac{371}{260.000.000} = 0,00000143 = 1,43 \times 10^{-6}$$

### Qual é a Probabilidade?

Como interpretar termos como *provável*, *improvável* ou *extremamente improvável*? O Departamento de Aeronáutica dos EUA (FAA) dá a seguinte interpretação. *Provável*: Uma probabilidade de 0,00001 ou mais para cada hora de voo. Espera-se a ocorrência de tais eventos várias vezes durante a vida operacional de cada aeronave. *Improvável*: Uma probabilidade da ordem de 0,00001 ou menos. Tais eventos não são esperados no decorrer da vida operacional de uma aeronave de determinado tipo, mas podem ocorrer durante a vida operacional de todos os aviões daquele tipo. *Extremamente improvável*: Uma probabilidade da ordem de 0,000000001 ou menos. Tais eventos são tão improváveis que podem ser considerados como se jamais ocorressem.

### → Axiomas da probabilidade

- $0 \leq P(A) \leq 1$  (qualquer evento)
- $P(S) = 1$  (evento certo)
- $P(\emptyset) = 0$  (evento impossível)

### → Regra da adição

\* Eventos mutuamente excludentes (quando não podem ocorrer simultaneamente – figura a).

$$d) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

\* Evento composto (quando combina dois ou mais eventos simples - figura b).

$$e) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

\* Eventos complementares (figura c).

Seja  $P(\bar{A})$  a probabilidade de não ocorrer o evento  $A$ .

$$f) P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Área total = 1

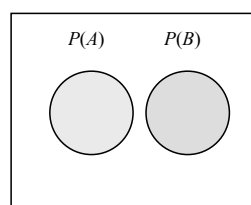


Diagrama de Venn.

(a)

Área total = 1

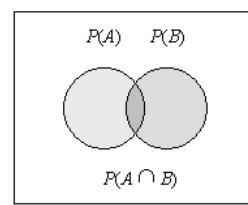


Diagrama de Venn.

(b)

Área total = 1

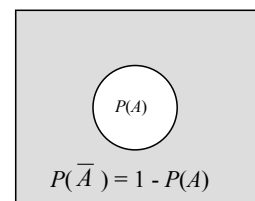


Diagrama de Venn.

(c)

Às vezes podemos ampliar não só nossa compreensão dos dados como nossa capacidade de resolver problemas, recolocando os dados em uma forma mais favorável. Em um teste com um antialérgico, 49 dos 781 usuários do antialérgico experimentaram dores de cabeça, 49 dos 665 que usaram placebo experimentaram dores de cabeça, e 24 dos 626 indivíduos do grupo de controle experimentaram dores de cabeça. Essas informações são mais facilmente compreendidas através da tabela dada no exemplo a seguir.

Ex. 2. Se um dos 2072 indivíduos da tabela a seguir é escolhido aleatoriamente, determine: (a) a probabilidade de se obter alguém que fez uso de um placebo ou estava no grupo de controle; (b) a probabilidade de se obter alguém que tenha usado antialérgico ou que não teve dor de cabeça.

|                   | Antialérgico | Placebo*   | Grupo de controle | Total       |
|-------------------|--------------|------------|-------------------|-------------|
| Dor de cabeça     | 49           | 49         | 24                | 122         |
| Não-dor de cabeça | 732          | 616        | 602               | 1950        |
| <b>Total</b>      | <b>781</b>   | <b>665</b> | <b>626</b>        | <b>2072</b> |

\* Preparado sem nenhuma ação ou efeito, usado em estudos para determinar a eficácia de substâncias medicinais.

$$(a) P(\text{placebo} \cup \text{grupo de controle}) = P(\text{placebo}) + P(\text{grupo de controle}) = \frac{665}{2072} + \frac{626}{2072} = \frac{1291}{2072} = 0,623$$

$$(b) P(\text{antialérgico} \cup \text{sem dor de cabeça}) = P(\text{antialérgico}) + P(\text{sem dor de cabeça}) - P(\text{antialérgico} \cap \text{sem dor de cabeça}) = \frac{781}{2072} + \frac{1950}{2072} - \frac{732}{2072} = \frac{1999}{2072} = 0,965$$

Ex. 3. Baseado em dados reais, se escolhermos aleatoriamente uma pessoa que se submete ao exame para exercício da advocacia, a probabilidade de obter alguém que seja aprovado é 0,57. Ache a probabilidade de escolher alguém que seja reprovado.

$$P(\text{aprovado}) = 0,57$$

$$P(\text{reprovado}) = 1 - P(\text{aprovado}) = 1 - 0,57 = 0,43$$

### → Regra da multiplicação

\* Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Se  $A$  e  $B$  não são independentes, dizem-se dependentes.

$P(A \cap B) \Rightarrow$  probabilidade de ocorrer o evento  $A$  (num primeiro momento ou repetição) e o evento  $B$  (num segundo momento ou repetição).

#### 1. Eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

#### 2. Eventos dependentes:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$ , onde  $P(B/A)$  é a probabilidade de ocorrência do evento  $B$  quando se sabe que o evento  $A$  já ocorreu (pode-se ler  $B/A$  como “ $B$  dado  $A$ ”).

\* Probabilidade condicional ( $P(B/A)$ )

Probabilidade de ocorrência do evento  $B$ , sabido que o evento  $A$  já ocorreu.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ex. 4. Na extração de duas cartas de um baralho, bem misturado, qual a probabilidade de que a primeira seja um ás e a segunda um rei. (a) Com reposição da carta retirada. (b) Sem reposição da carta retirada.

$$(a) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (4/52)(4/52) = 16/2704 = 0,00592$$

$$(b) P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (4/52)(4/51) = 16/2652 = 0,00603$$

Ex. 5. Com referência a tabela abaixo, admita que todas as escolhas envolvam os 2000 indivíduos representados na tabela e determine: (a) Se uma pessoa é selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de ela ter sido vítima de um estranho, dado que foi escolhida uma vítima de furto? (b) Escolhida uma vítima de assalto, qual a probabilidade de o criminoso ser um estranho? (c) Escolhida aleatoriamente uma vítima, qual a probabilidade de ela ter sido vitimada por um conhecido ou um parente, sabendo-se que foi vítima de furto? (d) Escolhida aleatoriamente uma vítima, qual a probabilidade de ela ter sido furtada por um conhecido ou um parente? (e) Escolhida aleatoriamente uma vítima, qual a probabilidade de ela ter sido furtada ou vitimada por um conhecido ou um parente? (f) Escolhidos aleatoriamente dois indivíduos diferentes, qual a probabilidade de ambos terem sido vítimas de furto?

| Relação entre criminoso e vítima | Homicídio | Furto      | Assalto     | Total       |
|----------------------------------|-----------|------------|-------------|-------------|
| Estranho                         | 12        | 379        | 727         | 1118        |
| Conhecido ou parente             | 39        | 106        | 642         | 787         |
| Ignorado                         | 18        | 20         | 57          | 95          |
| <b>Total</b>                     | <b>69</b> | <b>505</b> | <b>1426</b> | <b>2000</b> |

$$(a) P(\text{estranho/furto}) = P(\text{estranho} \cap \text{furto})/P(\text{furto}) = \frac{379/2000}{505/2000} = \frac{379}{505} = 0,750$$

$$(b) P(\text{estranho/assalto}) = P(\text{estranho} \cap \text{assalto})/P(\text{assalto}) = \frac{727/2000}{1426/2000} = \frac{727}{1426} = 0,510$$

$$(c) P(\text{conhecido ou parente/furto}) = P(\text{conhecido ou parente} \cap \text{furto})/P(\text{furto}) = \frac{106/2000}{505/2000} = \frac{106}{505} = 0,210$$

$$(d) P(\text{furto} \cap \text{conhecido ou parente}) = \frac{106}{2000} = 0,0530$$

$$(e) P(\text{furto} \cup \text{conhecido ou parente}) = P(\text{furto}) + P(\text{conhecido ou parente}) - P(\text{furto} \cap \text{conhecido ou parente}) = \frac{505}{2000} + \frac{787}{2000} - \frac{106}{2000} = 0,593$$

$$(f) P(\text{furto} \cap \text{furto}) = P(\text{furto}) \times P(\text{furto}) = \frac{505}{2000} \times \frac{505}{2000} = 0,0637$$

### → Exercícios

1. Ao escolher entre diversos fornecedores de computadores, um comprador deseja saber a probabilidade de um computador pessoal falhar durante os dois primeiros anos. Qual é essa probabilidade? (Dado: Uma pesquisa da *PC World* feita junto a 4000 possuidores de computadores pessoais revelou que 992 dos computadores falharam nos dois primeiros anos). 0,248

2. Uma companhia está cogitando lançar uma campanha por computador junto aos jovens de 11 a 19 anos. Em uma pesquisa com 1066 desses jovens, 181 tinham um serviço de computador *on-line* em sua residência. Selecionado aleatoriamente um desses jovens, estime a probabilidade de ele ou ela ter acesso ao serviço *on-line* em sua residência. Você aconselharia essa companhia a promover uma campanha publicitária por computador? (0,170)

3. Em uma pesquisa entre estudantes de uma faculdade, 1162 afirmaram que “colaram” nos exames, enquanto 2468 afirmaram não colar. Selecionado aleatoriamente um desses estudantes, determine a probabilidade de ele ou ela ter “colado” em um exame.

4. A tabela ao lado resume uma amostra de 200 tempos (em minutos) entre erupções do gêiser *Old Faithful* no Parque Nacional *Yellowstone*. Os visitantes do parque desejam assistir a uma erupção do gêiser, e assim o intervalo entre as erupções torna-se uma preocupação para os que não dispõem de muito tempo. Escolhido aleatoriamente um dos tempos da tabela: (a) qual é a probabilidade de ser no mínimo de uma hora? (b) escolhido aleatoriamente um dos tempos da tabela, qual é a probabilidade de ser no mínimo de 70 minutos ou de estar entre 60 e 79 minutos?

| Tempo (min) | Frequência |
|-------------|------------|
| 40 – 49     | 8          |
| 50 – 59     | 44         |
| 60 – 69     | 23         |
| 70 – 79     | 6          |
| 80 – 89     | 107        |
| 90 – 99     | 11         |
| 100 - 109   | 1          |

(a) 0,740; (b) 0,740

5. A tabela ao lado fornece a distribuição de idade (em anos) dos americanos mortos por acidente. Escolhida aleatoriamente uma das 95277 idades, determine a probabilidade de: (a) ser inferior a 15; (b) ser superior a 64; (c) ser inferior a 15 ou superior a 64; (d) ser inferior a 15 ou estar entre 5 e 44; (e) ser inferior a 5 ou superior a 64. (0,085), (0,266), (0,350), (0,580), (0,306)

| Idade (ano) | Número |
|-------------|--------|
| 0 – 4       | 3843   |
| 5 – 14      | 4226   |
| 15 – 24     | 19975  |
| 25 – 44     | 27201  |
| 45 – 64     | 14733  |
| 65 – 74     | 8499   |
| 75 ou mais  | 16800  |

6. O gráfico ramo-e-folhas ao lado resume o tempo (em horas) que os gerentes gastam em serviços burocráticos por dia. Com base nessa amostra, estime a probabilidade de um gerente selecionado aleatoriamente gastar por dia em serviços burocráticos: (a) mais de 2,0 horas; (b) menos de 1,0 hora; (c) mais que 3,0 horas; (d) menos que 1,0 hora ou entre 1,0 e 2,0 horas.

|    |          |
|----|----------|
| 0, | 00       |
| 1, | 0578     |
| 2, | 00113449 |
| 3, | 347      |
| 4, | 445      |

7. Um casal planeja ter 4 filhos. (a) Relacione os 16 resultados distintos possíveis (espaço amostral) de acordo com o sexo de cada criança. Suponha que esses resultados sejam igualmente prováveis. (b) Determine a probabilidade de serem todas meninas; (c) determine a probabilidade de haver ao menos uma criança de cada sexo; (d) determine a probabilidade de exatamente 2 crianças de cada sexo. (b)  $1/16$ ; (c)  $7/8$ ; (d)  $3/8$

8. Em um teste com 3 questões do tipo verdadeiro/falso, um estudante que não está preparado deve responder cada uma questão aleatoriamente (“no chute”). (a) Relacione os diferentes resultados possíveis. (b) Qual é a probabilidade de responder corretamente todas as três questões? (c) Qual é a probabilidade de “chutar” incorretamente todas as três questões? (d) Qual é a probabilidade de passar no teste “chutando” corretamente ao menos 2 questões?  $(1/8)$ ,  $(1/8)$ ,  $(1/2)$

9. O lançamento de um par de dados admite 36 resultados possíveis. (a) Construa o espaço amostral relacionando os diferentes resultados possíveis. (b) Qual é a probabilidade da soma dos resultados ser 7? (c) Oito resultados consecutivos iguais a 7 lhe parece algo normal? (d) Qual é a probabilidade do produto dos resultados ser 12?

10. Um gerente de controle de qualidade utiliza equipamento de teste para detectar *modems* de computador defeituosos. Retiram-se aleatoriamente 3 *modems* diferentes de um grupo onde há 12 defeituosos e 18 sem defeito. Qual a probabilidade: (a) de todos os três serem defeituosos; (b) de ao menos um dos *modems* escolhidos ser defeituoso? (a) 0,0542; (b) 0,799

11. Uma caixa contém 12 lâmpadas, das quais 4 são defeituosas. Retirando-se, aleatoriamente, 3 lâmpadas da caixa, calcule a probabilidade de que: (a) nenhuma seja defeituosa; (b) pelo menos uma seja defeituosa.  $(14/55)$ ,  $(41/55)$

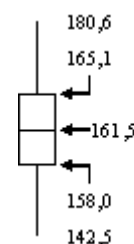
12. Um gerente pode identificar roubos cometidos por empregados verificando amostras de despachos efetuados pelos mesmos. De 36 empregados, 2 estão roubando. Se o gerente verifica 4 empregados selecionados aleatoriamente, qual é a probabilidade de (a) nenhum dos ladrões ser identificado? (b) Pelo menos um dos ladrões ser identificado?

13. Ao delinear um processo de fabricação para um dispositivo de armazenamento de memória de computador, a configuração inicial tem um resultado positivo de 16%. Isto é, 16% dos dispositivos são aceitáveis, e 84% são defeituosos. Fabricados 12 desses dispositivos, qual a probabilidade de obter ao menos um que seja bom? 0,877

14. Um estudante tem dificuldade com o mau funcionamento de despertadores. Em lugar de utilizar 1 despertador, ele decide utilizar 3. Qual a probabilidade de ao menos 1 despertador funcionar, se cada despertador tem 98% de chance de funcionar?  $(0,999992)$

15. Três firmas que trabalham com o mesmo auditor escolhem, independentemente e aleatoriamente, um mês para realização da auditoria anual. Qual a probabilidade de os três meses escolhidos serem diferentes.

16. O diagrama de caixa ao lado ilustra as estaturas (em centímetros) de um grande conjunto de mulheres selecionadas aleatoriamente. (a) Escolhida aleatoriamente uma dessas mulheres, determine a probabilidade de sua altura estar entre 142,5 e 158,0 centímetros; (b) escolhida aleatoriamente uma dessas mulheres, determine a probabilidade de sua altura ser inferior a 158,0 ou superior a 161,5 centímetros; (c) escolhidas aleatoriamente duas mulheres, determine a probabilidade de ambas terem altura entre 158,0 e 161,5 centímetros. (a)  $1/4$ ; (b)  $3/4$ ; (c)  $1/16$



17. A tabela ao lado resume os resultados de um estudo de 1000 mortes, selecionadas aleatoriamente, de homens com idade de 45 a 64 anos (com base no “*Chartbook on Smoking, Tobacco and Health*”). (a) Se, dos 1000 indivíduos, 1 é selecionado aleatoriamente, determine a probabilidade de se obter um fumante; (b) se, dos 1000 indivíduos, 1 é selecionado aleatoriamente, determine a probabilidade de se obter um fumante ou alguém que tenha morrido em consequência de doença cardíaca; (c) escolhidos aleatoriamente dois indivíduos, determine a probabilidade de ambos terem morrido de câncer; (d) escolhido aleatoriamente um indivíduo, determine a probabilidade de obter um não-fumante que tenha morrido de câncer; (e) escolhido aleatoriamente um indivíduo, determine a probabilidade de obter alguém que tenha morrido de câncer ou de doença cardíaca; (f) escolhidos aleatoriamente três indivíduos diferentes, determine a probabilidade de serem todos fumantes; (g) escolhido aleatoriamente um indivíduo, determine a probabilidade de se tratar de um fumante, dado que morreu de câncer; (h) escolhido aleatoriamente um indivíduo, determine a probabilidade de se obter alguém que tenha morrido de câncer, dado que se tratava de um fumante; (i) o fumo e incidência de câncer são eventos independentes? Por que sim ou por que não? (a) 0,650; (b) 0,805; (c) 0,0359; (d) 0,0550; (e) 0,655; (f) 0,274; (g) 0,711; (h) 0,208

|             | Causa da morte |                 |        |
|-------------|----------------|-----------------|--------|
|             | Câncer         | Doença cardíaca | Outros |
| Fumante     | 135            | 310             | 205    |
| Não-fumante | 055            | 155             | 140    |

18. Os pesquisadores estão preocupados com o declínio do nível de cooperação por parte dos entrevistados em pesquisas. Um pesquisador aborda 84 pessoas na faixa etária 18-21 e constata que 73 respondem, enquanto 11 recusam responder. Quando são abordadas 275 pessoas na faixa etária 22-29, 255 respondem e 20 recusam responder. Suponha que 1 dos 359 indivíduos seja escolhido aleatoriamente. Determine a probabilidade de: (a) obter alguém que recuse responder; (b) obter alguém na faixa etária 18-21 ou alguém que recuse responder; (c) obter alguém na faixa etária de 18-21 ou alguém que tenha respondido; (d) obter alguém na faixa etária 22-29 ou alguém que recuse responder; (e) obter alguém na faixa etária de 22-29 ou alguém que tenha respondido; (f) obter alguém que respondeu, dado que estava na faixa etária 22-29; (g) obter alguém que recusou responder, dado que estava na faixa etária 18-21. (h) Escolhidos aleatoriamente dois indivíduos, determine a probabilidade de ambos terem recusado responder. (0,0864), (0,290), (0,944), (0,797), (0,919), (0,927), (0,131), (0,00746)

19. Os problemas de assédio sexual têm recebido muita importância nos últimos anos. Em uma pesquisa, 420 trabalhadores (240 dos quais homens) consideram uma simples batida no ombro como uma forma de assédio sexual, enquanto que 580 trabalhadores (380 dos quais homens) não consideram isso como assédio. Escolhido aleatoriamente um dos trabalhadores pesquisados, determine a probabilidade de (a) obter alguém que não considere uma simples batida no ombro como uma forma de assédio sexual; (b) obter um homem ou alguém que não considere uma batida no ombro como forma de assédio; (c) obter uma mulher ou alguém que não considere uma batida no ombro como uma de assédio; (d) obter alguém que considere uma batida no ombro como forma de assédio, dado que é uma mulher; (e) obter alguém que não considere uma batida no ombro como forma de assédio, dado que é um homem. (f) Escolhidos aleatoriamente dois indivíduos, determine a probabilidade de ambos considerarem uma batida no ombro uma forma de assédio.

## Curiosidades

### **Motores a Jato Independentes**

Um jato de três motores decolou do Aeroporto Internacional de Miami com destino à América do Sul, mas um dos motores falhou logo após a decolagem. Enquanto o avião retornava à pista, os outros dois motores também falharam, mas o piloto conseguiu fazer uma aterrissagem segura. Com três motores *independentes*, a probabilidade de todos os três falharem simultaneamente é de apenas 0,0001<sup>1</sup>, ou seja, uma chance em um trilhão. As autoridades do Ministério da Aeronáutica americano constataram que um mesmo mecânico havia trocado o óleo nas três turbinas, colocando incorretamente os anéis de vedação da entrada de óleo. A utilização de três motores distintos *independentes* tem por objetivo aumentar a segurança, mas a interferência de um único mecânico tornou os motores *dependentes*. Os processos de manutenção exigem agora que os motores sejam vistoriados e ajustados por mecânicos diferentes.

### **Condenados por Probabilidade**

Uma testemunha descreveu uma ladra de Los Angeles como uma mulher caucasiana com cabelos loiros penteados em forma de rabo de cavalo, que fugira em um carro amarelo dirigido por um homem afro-americano com bigode e barba. Janet e Malcolm Collins coincidiam com as características descritas, e foram condenados com base na hipótese de que há apenas 1 chance em 12 milhões de um casal ter essas mesmas características. A probabilidade de um carro amarelo era de 1/10, e as outras probabilidades foram estimadas em 1/4, 1/10, 1/3, 1/4 e 1/1000. As sentenças foram posteriormente revertidas, quando se observou que não havia evidência que apoiasse as probabilidades estimadas ou a independência dos eventos. Entretanto, como o casal não foi selecionado aleatoriamente, cometeu-se sério erro em não considerar a probabilidade de outros casais com as mesmas características estarem na mesma área.